GeoScienceEd *5(4) (2024)*

Jurnal Pendidikan, Sains, Geologi, dan Geofisika

http://jpfis.unram.ac.id/index.php/GeoScienceEdu/index

Dimensi Metrik Pada Graf Subdivisi Kincir $K_1 + mK_3$

Vetty Sugiarty[1*], Amrullah[2], Eka Kurniawan[3], Nurul Hikmah[4]
[1]Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia.

DOI: https://doi.org/10.29303/geoscienceed.v5i4.489

Article Info
Received: 14 October 2024
Revised: 19 October 2024
Accepted: 29 October 2024

Correspondence:

Phone: +62-877-7829-8100.

Abstrak: penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dimensi matrik pada graf subsidi kincir $K_1 + mK_3$. Dimensi metrik merupakan konsep penting dalam teori graf yang banyak digunakan dalam berbagai bidang, diataranya navigasi, lokalisasi jaringan, dan desain jaringan. Konsep dimensi metrik merupakan konsep penentuan simpul penanda paling sedikit sehingga setiap simpul dalam graf terbedakan satu sama lain. Tujuan penelitian ini adalah menentukan dimensi metrik pada graf subdivisi kincir $K_1 + mK_3$. Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian murni. Dengan menggunakan analisis struktur graf dan jarak simpul, tulisan ini menunjukkan nilai dimensi metrik dari graf subdivisi $S(G, e)$, khusus pada graf kincir $G = K_1 + mK_3$ untuk $2 \leq m \leq 4$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dimensi metrik pada graf subdivisi kincir $K_1 + mK_3$ adalah berkurang satu dari dimensi metrik graf kincir sebelum disubdivisi, $dim\big(S(G, e)\big) = dim(G) - 1$.

Kata Kunci: Dimensi Metrik, Graf Kincir $K_1 + mK_3$, Himpunan Pembeda.

Citation: Sugiarty, V., Amrullah., Kurniawan, E & Hikmah, N. (2024). Dimensi Metrik Pada Graf Subdivisi Kinci $K_1 + mK_3$. *Journal of Education, Science, Geology, and Geophysics (GeoScienceEd),* 5(4), 852-857. https://doi.org/10.29303/geoscienceed.v5i4.489

Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sangat bermanfaat dalam membantu menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata. Dengan mempresentasikan permasalahan dalam kehidupan nyata ke dalam bentuk graf, suatu permasalahan akan mudah dimengerti dan lebih mudah dalam mencari solusinya (Haspika, Hasmawati, & Aris, 2023).

Salah satu tema yang menjadi kajian penelitian dalam teori graf adalah dimensi metrik. Menurut (Chartrand, Eroh, Johnson, & Oellerman, 2000), konsep dimensi metrik berawal dari ide himpunan pembeda dan himpunan pembeda minimum yang diperkenalkan oleh (Slater, 1975). Slater memperkenalkan konsep himpunan locating, yang mendefinisikan location number sebagai kardinalitas terkecil dari himpunan simpul pembeda pada graf G. Kemudian dikembangkan oleh (Harary & Melter, 1976). Mengutarakan dimensi metrik sebuah graf G didefinisikan sebagai kardinalitas terkecil dari basis metrik yang dikenal saat ini.

Dalam konsep dimensi metrik, misalkan u dan v adalah dua *vertex* pada graf terhubung G, maka jarak dari u ke v adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Untuk himpunan terurut $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ dari *vertex-vertex* dalam graf G dan *vertex* v pada G, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-*tuple*).

$r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$

Jika representasi v terhadap W untuk setiap *vertex* v pada G berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari graf G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan pembeda terkecil (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan dim (G) (Chartrand et al., 2000).

Contoh aplikasi yang memanfaatkan dimensi metrik pada graf yaitu navigasi robot (Franz, Scholkopf, Mallot, & Bulthoff, 1998), dimana sebuah robot bergerak dari satu simpul lokasi ke simpul lainnya pada ruang dengan meminimalkan kesalahan yang terjadi dalam menafsirkan koordinat yang didapatkan dari simpul-

Email: sugiartyvetty@gmail.com

simpul lokasi tersebut. Oleh karena itu, setiap simpul lokasi pada bidang gerak robot harus memberikan koordinat yang unik dan berbeda. Jika simpul lokasi dipandang sebagai *vertex* dan lintasan robot dipandang sebagai sisi, maka ruang gerak robot dapat dipresentasikan sebagai graf.

Persoalan dimensi metrik adalah penentuan simpul penanda sehingga koordinat berbeda dan unik memiliki unsur sekecil mungkin. Jika unsur simpul penanda adalah jarak simpul-simpul penanda yang memiliki unsur sekecil mungkin, maka penentuan himpunan pembeda sekecil mungkin ini dinamakan dimensi metrik (Khuller, Raghavachari, & Rosenfeld, 1996).

Penelitian tentang dimensi metrik pada graf merupakan penelitian yang sedang menjadi topik yang banyak diminati saat ini. Hal ini dibuktikan dengan banyaknya jurnal dan penelitian yang membahas tentang kajian ini bahkan dengan jenis dimensi lainnya, yang dikenal sebagai dimensi partisi, menemukan dimensi partisi pada graf masih merupakan masalah terbuka dalam teori graf. Oleh karena itu, beberapa peneliti menyelidiki masalah tersebut (Amrullah, Azmi, Turmuzi, Baidowi, & Kurniati, 2021) menurut (Amrullah, Baskoro, Uttunggadewa, & Simanjuntak, 2016) Dimensi partisi, pd (G) dari G adalah bilangan bulat terkecil p sehingga G mempunyai partisi penyelesaian p.

Beberapa tentang dimensi metrik telah dipublikasikan diantaranya, "Dimensi Metrik Graf Kincir Pola $K_1 + mK_4$ " telah dipublikasikan oleh (Riyandho, Narwen, & Efendi, 2018) hasil penelitian disimpulkan bahwa, dimensi metrik graf kincir pola $K_1 + mK_4$ untuk $m \geq 2$ adalah $3m$, kemudian "Dimensi Metrik Pengembangan Graf Kincir Pola $K_1 + mK_3$" telah dipublikasikan oleh (Wahyudi, Sumarno, & Suharmadi, 2011) hasil penelitian disimpulkan bahwa dimensi metrik pengembangan graf kincir pola $K_1 + mK_3$ dengan $m \geq 2$ adalah $2m$, selanjutnya "Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Jembatan dari *Caterpilla*r Homogen dan Pot Bunga Diperumum" dipublikasikan oleh (Hidayanti, Amrullah, Kurniati, & Hayati, 2022). Hasil penelitian disimpulkan bahwa dimensi metrik graf jembatan dari graf *caterpillar* homogen $C(m, n)$ dan pot bunga diperumum $C_p - K_{q1,q2,\ldots qp}$ adalah paling kecil berkurang dua dari nilai $m(n-1) + \sum_{i=1}^{p} q_i - 2p$. Dimensi metrik terbesar graf jembatan tersebut adalah sama dengan $m(n-1) + \sum_{i=1}^{p} q_i - 2p$.

Graf kincir dapat disebut juga dengan graf lengkap K_n yang disalin sebanyak m salinan dengan sebuah titik sebagai titik pusat bersama dari semua salinan dari graf lengkap tersebut (Riyandho et al., 2018). Graf kincir $K_1 + mK_3$ adalah jenis graf yang terdiri dari graf lengkap K_1 dan graf lengkap K_3 sebanyak m (Miller, Patel, Ryan, Sugeng, Slamin, & Tuga, 2005). Graf K_1 terdiri dari satu simpul, sedangkan graf lengkap K_3 memiliki m simpul dan m sisi, dimana setiap simpul dihubungkan dengan satu simpul pusat dan simpul-simpul lainnya membentuk segitiga.

Adapun kelebihan graf kincir pola $K_1 + mK_3$ yaitu cenderung memiliki efisiensi dalam representasi data karena mengurangi jumlah edge yang perlu disimpan dibandingkan dengan graf yang tidak memiliki pola tersebut. Hal ini tentu bisa menghemat ruang penyimpanan dan mempercepat proses analisis data, selain itu memberikan representasi visual yang intuitif, memungkinkan untuk dengan cepat memahami pola koneksi antara simpul-simpul dalam graf.

Salah satu metode yang digunakan peneliti adalah operasi graf, misalnya operasi subdivisi (Amrullah, Azmi, Soeprianto, & Anwar, 2018). Namun dari penelitian-penelitian tentang dimensi metrik graf kincir sebelumnya, hanya membahas terkait struktur dimensi metrik pada graf tanpa suatu operasi graf. Oleh karena itu penelitian ini akan menggunakan salah satu operasi graf yaitu operasi subdivisi. Misalkan G adalah suatu graf yang dipilih secara acak, untuk setiap bilangan bulat positif k dan $e \in E(G)$, subdivisi dari graf G , dilambangkan dengan $S(G(e{:}\,k))$, adalah graf yang diperoleh dari G dengan mengganti sisi e dengan lintasan $(k+1)$ (Amrullah, 2020). Sedangkan menurut (Yulianti, Hidayati, & Welyyanti, 2023) subdivisi pada graf adalah melakukan operasi subdivisi terhadap satu sisi tertentu, dengan menyisipkan simpul baru di sepanjang satu atau lebih sisi (edges) graf tersebut.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan dimensi metrik pada graf subdivisi kincir $K_1 + mK_3$, graf kincir $K_1 + mK_3$ dipilih karena belum ada peneliti sebelumnya yang membahas terkait graf kincir $K_1 + mK_3$, dengan demikian hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi acuan bagi peneliti berikutnya yang akan meneliti terkait dimensi metrik pada subdivisi graf yang lainnya.

Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu penelitian murni. Penelitian ini menggunakan pendekatan analisis struktur graf dengan memperhatikan orde, jarak, derajat simpul, hingga menentukan dimensi metrik pada graf. Adapun pada penelitian ini teknik pengumpulan data dilakukan dari menganalisis perancangan graf kincir $K_1 + mK_3$ dengan memperhatikan nilai m. Dimulai dengan $m = 2$, dilakukan subdivisi pada sisi-sisi yang terhubung dengan simpul pusat. kemudian dilakukan penentuan himpunan pembeda pada setiap subdivisi e. Penentuan himpunan pembeda minimal dilakukan dengan memperhatikan pola jarak antar simpul-simpul dan derajat simpul terbesar. Untuk $m = 3\ dan\ 4$ penentuan himpunan pembeda minimal dilakukan dengan cara yang sama dengan $m = 2$.

Dalam penelitian ini terdapat beberapa langkah yang dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Konstruksi graf kincir $K_1 + mK_3$ dimulai dengan $m = 2$
2. Konstruksi himpunan pembeda dari graf subdivisi kincir dengan cara :
   a. Subdivisi dilakukan pada sisi yang terkait dengan simpul pusat dengan menambahkan simpul pada sisi tersebut.
   b. Pengambilan beberapa simpul pada graf komplit graf K_3 dimasukkan ke dalam himpunan pembeda.
   c. Melakukan beberapa kombinasi pengambilan simpul-simpul pada semua graf komplit.
   d. Mencari jarak setiap simpul terhadap keseluruhan simpul dalam himpunan pembeda. Jika simpul tersebut bukan himpunan pembeda, maka dilanjutkan kombinasi simpul-simpul yang belum diambil sebelumnya.
   e. Menentukan representasi setiap simpul graf dengan himpunan pembeda.
   f. Selanjutnya dilakukan subdivisi pada sisi-sisi lainnya di graf lengkap K_3.
3. Menentukan dimensi metrik graf subdivisi kincir berdasarkan himpunan pembeda yang benar. Hal ini dilakukan dengan pembuktian secara umum pada graf kincir dengan subdivisi untuk setiap sisi graf.
4. Pembuktian hasil dimensi metrik pada graf subdivisi kincir $K_1 + mK_3$ berdasarkan data-data yang telah diperoleh pada graf kincir $m = 2$ sampai $= 4$. Pembuktian secara umum ini menggunakan pola sifat jarak antar simpul dan letak simpul dari himpunan pembeda. Pembuktian ini akan berlaku pada graf kincir $K_1 + mK_3$ dengan $2 \leq m \leq 4$ secara umum.

Hasil dan Pembahasan

Lemma 1

Misalkan $G = K_1 + nK_3$, $D_i = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}\} \subseteq V(G)$ dan W adalah himpunan pembeda dari G maka terdapat minimal 2 simpul di $D_i \in W$.

Bukti:

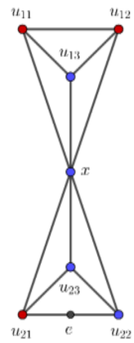
Andaikan terdapat satu simpul di $D_i \in W$, misal hanya $u_{11} \in D_i$. Hal ini mengakibatkan simpul u_{12} dan u_{13} berjarak 1 dengan u_{11}, sedangkan jarak simpul u_{12} dan u_{13} ke semua simpul lain berjarak adalah sama, akibatnya $r(u_{12}|W) = r(u_{13}|W)$. Kontradiksi.

Teorema 1

Jika graf kincir $G = K_1 + 2K_3$ dan $e \in E(G)$ maka $dim\ (S(G, e)) = 3$

Pembuktian:

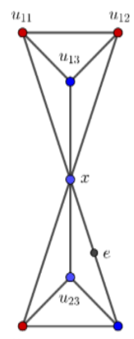
Untuk membuktikan hal ini, akan dipertimbangkan dari dua kemungkinan kasus



Gambar 1. Graf Kincir $K_1 + 2K_3$

Kasus 1: Sisi subdivisi $e = u_{i1}u_{i2}$ dengan $i \in \{1,2\}$, merupakan sisi yang tidak bersisian dengan simpul pusat x. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $i = 2$, Pilih himpunan $W = \{u_{11}, u_{12}, u_{21}\}$, memiliki 3 simpul dengan hanya satu anggota simpul u_{21} dari sisi yang bersisian dengan sisi subdivisi tersebut. Perhatikan Gambar 1 $e = u_{21}u_{22}$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa semua simpul yang bukan anggota W memiliki representasi yang berbeda $\{u_{13}, x, u_{23}, u_{22}, e\}$. Kelima simpul tersebut berturut-turut memiliki representasi yang berbeda yaitu $(1, 1, 2), (1, 1, 1), (2, 2,1), (2, 2, 2), (3, 3, 1)$.

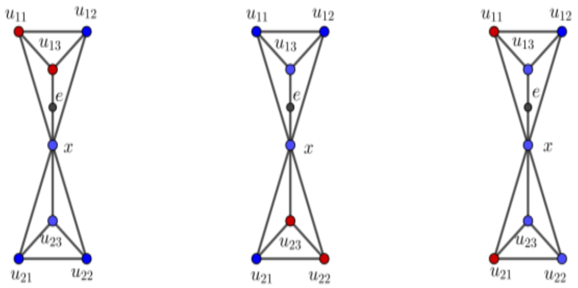
Hal ini menunjukkan bahwa $dim\ (S(G, e)) \leq 3$.



Gambar 2. Graf Kincir $K_1 + 2K_3$

Kasus 2: Sisi Subdivisi $e = u_{ij}$ dengan $i, j \in \{1,2\}$ merupakan sisi yang bersisian dengan simpul pusat x. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $u_{ij} = u_{22}$, himpunan $W = \{u_{11}, u_{12}, u_{21}\}$ dengan 3 simpul dan hanya satu simpul anggota yang tidak bersisian dengan simpul subdivisi e tersebut. Perhatikan Gambar 2 $e = u_{22}x$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa simpul yang bukan anggota W yaitu $\{u_{13}, x, u_{23}, u_{22}, e\}$ memiliki representasi yang berbeda. Kelima simpul tersebut berturut-turut memiliki representasi yang berbeda yaitu $(1,1,2),(1,1,1),(2,2,1),(3,3,1),(2,2,2)$

Hal ini menunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \leq 3$. Kedua kasus tersebut menujukkan bahwa untuk setiap $e \in E(G)$ berlaku $dim\ (S(G,e)) \leq 3$. (1)



Gambar 3. Graf Kincir $K_1 + 2K_3$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $dim\left(S(G,e)\right) \geq 3$. Andaikan $dim\ (S(G,e)) = 2$. Hal ini berarti terdapat W himpunan pembeda dengan $|W| = 2$, misalkan $W = \{z_1, z_2\}$. Misalkan sisi subdivisi $e = u_{13}x$ atau $e = u_{12}u_{13}$. Perhatikan Gambar 3, misalkan $A = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\}$ dan $B = \{u_{21}, u_{22}, u_{23}\}$. Ada tiga kemungkina unsur simpul di W berada dalam A atau B. Kesatu, jika $z_1, z_2 \in A$ maka $r(u_{21}|W) = r(u_{23}|W)$ kontradiksi. Kedua, jika $z_1, z_2 \in B$ maka $r(u_{11}|W) = r(u_{12}|W)$ kontradiksi. Jika $z_1 \in A$ dan $z_2 \in B$, misal $z_1 = u_{11}$, $z_2 = u_{21}$ maka $r(u_{22}|W) = r(u_{23}|W) = (2,1)$ kontradiksi. Berdasarkan ketiga kemungkinan tersebut, menunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \geq 3$. (2)

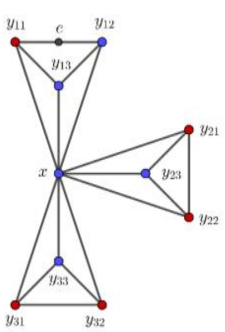
Oleh karena itu, berdasarkan pertidaksamaan (1) dan (2), diperoleh $dim\ (S(G,e)) = 3$ untuk setiap sisi subdivisi pada $G = K_1 + 2K_3$.

Teorema2

Jika graf kincir $G = K_1 + 3K_3$ dan $e \in E(G)$ maka $dim\ (S(G,e)) = 5$

Pembuktian:

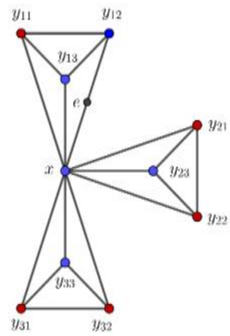
Hal ini dapat ditunjukkan dengan menganalisis dari dua alternatif kasus



Gambar 4. Graf Kincir $K_1 + 3K_3$

Kasus 1: Sisi subdivisi $e = y_{i1}y_{i2}$ dengan $i \in \{1,2,3\}$, merupakan sisi yang tidak berbagi simpul dengan simpul pusat x. Tanpa mengubah sifat umumnya, misalkan $i = 1$, Pilih himpunan $W = \{y_{11}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}\}$. memiliki 5 simpul dengan hanya satu anggota simpul y_{11} dari sisi yang berbagi simpul dengan sisi subdivisi tersebut. Perhatikan Gambar 4 $e = y_{11}y_{12}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap simpul yang tidak termasuk dalam W memiliki representasi yang unik $\{y_{12}, y_{13}, x, y_{23}, y_{33}, e\}$. Keenam simpul tersebut secara berurutan memiliki representasi yang unik satu sama lain yaitu $(2,2,2,2,2),(1,2,2,2,2),(1,1,1,1,1),$ $(2,1,1,2,2),(2,2,2,1,1),(1,3,3,3,3,)$.

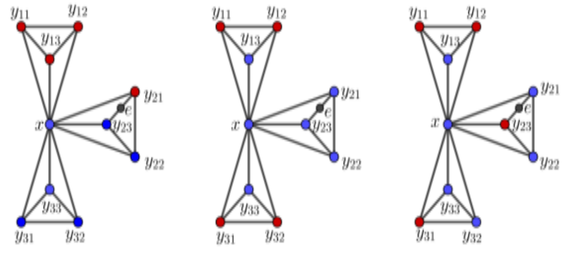
Hal ini menunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \leq 5$.



Gambar 5. Graf Kincir $K_1 + 3K_3$

Kasus 2: Sisi Subdivisi $e = y_{ij}$ dengan $i,j \in \{1,2,3\}$ merupakan sisi yang berbagi simpul dengan simpul pusat x. Tanpa mengubah sifat umumnya, misalkan $y_{ij} = y_{12}$, himpunan $W = \{y_{11}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}\}$ dengan 5 simpul dan hanya satu simpul yang bukan anggota W yang dapat berbagi simpul dengan simpul subdivisi e tersebut. Perhatikan Gambar 5 $e = y_{12}x$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap simpul yang tidak termasuk dalam W memiliki representasi yang unik yaitu $\{y_{12}, y_{13}, x, y_{23}, y_{33}, e\}$. Keenam simpul tersebut secara berurutan memiliki representasi yang unik satu sama lain yakni $(1,3,3,3,3),(1,2,2,2,2),(1,1,1,1,1),$ $(2,1,1,2,2),(2,2,2,1,1),(2,2,2,2,2)$.

Hal ini menunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \leq 5$. Kedua kasus tersebut menujukkan bahwa untuk setiap $e \in E(G)$ berlaku $dim\ (S(G,e)) \leq 5$. (1)



Gambar 6. Graf Kincir $K_1 + 3K_3$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \geq 5$. Andaikan $dim\ (S(G,e)) = 4$. Ini menunjukkan bahwa ada himpunan pembeda W dengan $|W| = 4$, misalkan $W = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Andaikan sisi subdivisi $e = y_{23}x$ atau $e = y_{21}y_{23}$. Jika himpunan pembeda $A = \{y_{11}, y_{12}, y_{13}\}$ himpunan $B = \{y_{21}, y_{22}, y_{23}\}$ himpunan $C = \{y_{31}, y_{32}, y_{33}\}$. Karena ada 4 simpul di W, maka paling banyak 3 simpul di $A, B, atau\ C$ dengan tiga kemungkinan unsur simpul di W. Pertama misalkan 3 simpul di A yaitu $z_1, z_2, z_3 \in A$ dan $z_4 \in B\ atau\ C$, misal $z_4 = y_{21}$ maka $r(y_{31}|W) = r(y_{33}|W)$ kontradiksi. Kedua jika $z_1, z_2 \in A$ dan $z_3, z_4 \in B\ atau\ C$, misal $z_3 = y_{31}$, $z_4 = y_{32}$ maka $r(y_{21}|W) = r(y_{22}|W)$ kontradiksi. Ketiga jika $z_1, z_2 \in A$, $z_3 \in B$ dan $z_4 \in C$, misal $z_3 = y_{23}$, $z_4 = y_{31}$ maka $r(y_{32}|W) = r(y_{33}|W) = (2,2,2,1)$ kontradiksi.

Melalui ketiga kemungkinan tersebut, dapat ditunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \geq 5$. (2)

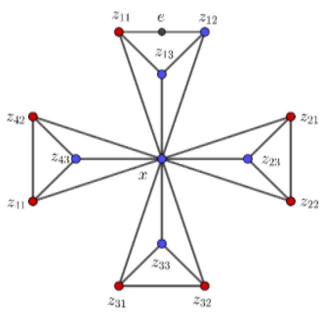
Akibatnya, berdasarkan pertidaksamaan (1) dan (2), diperoleh hasil bahwa $dim\ (S(G,e)) = 5$ untuk setiap sisi subdivisi pada $G = K_1 + 3K_3$.

Teorema 3

Jika graf kincir $G = K_1 + 4K_3$ dan $e \in E(G)$ maka $dim\ (S(G,e)) = 7$

Pembuktian:

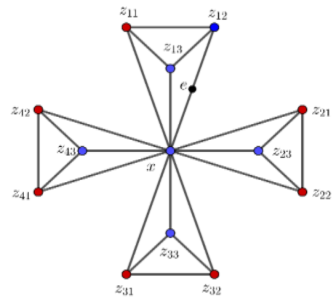
Pernyataan tersebut bisa dibuktikan dengan mengevaluasi dari dua kemungkinan kasus



Gambar 7. Graf Kincir $K_1 + 4K_3$

Kasus 1: Sisi subdivisi $e = z_{i1}z_{i2}$ dengan $i \in \{1,2,3,4\}$, merupakan sisi yang tidak terhubung dengan simpul pusat x . Tanpa mempengaruhi karakteristik utamanya, misalkan $i = 1$, Pilih himpunan $W = \{z_{11}, z_{21}, z_{22}, z_{31}, z_{32}, z_{41}, z_{42}\}$. memiliki 7 simpul dengan hanya satu anggota simpul z_{11} dari sisi yang terhubung dengan sisi subdivisi tersebut. Perhatikan Gambar 5.7 $e = z_{11}z_{12}$. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa setiap simpul di luar himpunan W memiliki representasi yang khas $\{z_{12}, z_{13}, x, z_{23}, z_{33}, z_{43}, e\}$. Ketujuh simpul tersebut secara berurutan memiliki representasi yang khas satu sama lain yaitu
$(2,2,2,2,2,2,2), (1,2,2,2,2,2,2),$
$(1,1,1,1,1,1,1), (2,1,1,2,2,2,2),$
$(2,2,2,1,1,2,2), (2,2,2,2,2,1,1),$
$(1,3,3,3,3,3,3)$

Hal ini menunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \leq 7$

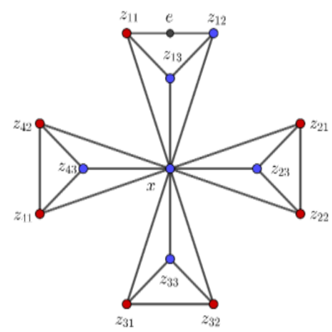


Gambar 8. Graf Kincir $K_1 + 4K_3$

Kasus 2: Sisi Subdivisi $e = z_{ij}$ dengan $i, j \in \{1,2,3,4\}$ merupakan sisi yang terhubung dengan simpul pusat x. Tanpa mempengaruhi karakteristik utamanya, misalkan $z_{ij} = z_{12}$, himpunan $W = \{z_{11}, z_{21}, z_{22}, z_{31}, z_{32}, z_{41}, z_{42}\}$ dengan 7 simpul dan hanya satu simpul yang bukan anggota W yang dapat berbagi simpul dengan simpul subdivisi e tersebut. Perhatikan Gambar 5.8 $e = z_{12}x$. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa setiap simpul di luar himpunan W memiliki representasi yang khas yaitu $\{z_{12}, z_{13}, x, z_{23}, z_{33}, z_{43}, e\}$. Ketujuh simpul tersebut secara berurutan memiliki representasi yang khas satu sama lain yakni
$(2,2,2,2,2,2,2), (1,2,2,2,2,2,2), (1,1,1,1,1,1,1),$
$(2,1,1,2,2,2,2), (2,2,2,1,1,2,2), (2,2,2,2,2,1,1),$
$(1,3,3,3,3,3,3)$

Hal ini menunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \leq 7$

Kedua kasus tersebut menujukkan bahwa untuk setiap $e \in E(G)$ berlaku $dim\ (S(G,e)) \leq 7$. (1)



Gambar 9. Graf Kincir $K_1 + 4K_3$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $dim\ (S(G,e)) \geq 7$ .Misalkan W adalah himpunan pembeda dari G

Berdasarkan *Lemma 1* terdapat minimal dua simpul di D_2, D_3, D_4 yang termasuk dalam himpunan pembeda W. Selanjutnya akan dibuktikan setidaknya terdapat satu simpul di D_1 yang juga termasuk dalam himpunan pembeda W. Andaikan tidak ada simpul di D_1 yang termasuk dalam himpunan pembeda W , ini berarti semua simpul di D_1 memiliki jarak yang sama ke semua simpul lainnya, sehingga semua simpul di D_1 memiliki jarak yang identik. Ini jelas menimbulkan kontradiksi. Oleh karena itu, terdapat setidaknya 1 simpul di D_1 yang termasuk dalam himpunan W. Dengan demikian terdapat minimal 7 simpul, yaitu minimal dua simpul dari masing-masing D_2, D_3, D_4 serta minimal 1 simpul dari D_1 yang termasuk dalam himpuanan pembeda W. Akibatnya, diperoleh dimensi himpunan pembeda $S(G, e)$ memenuhi $dim\,(S(G,e)) \geq 7$ (2)

Akibatnya, berdasarkan pertidaksamaan (1) dan (2), diperoleh hasil bahwa $dim\,(S(G,e)) = 7$ untuk setiap sisi subdivisi pada $G = K_1 + 4K_3$.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dimensi metrik pada graf subdivisi kincir $K_1 + mK_3$ dengan $2 \leq m \leq 4$ berukurang 1 dari dimensi metrik sebelum disubdivisi yaitu $dim(S(K_1 + mK_3, e)) = dim(K_1 + mK_3) - 1$. Untuk $2 \leq m \leq 4$. Peneliti memberikan dukungan kepada peneliti selanjutnya untuk menemukan dimensi metrik pada graf yang lain misalnya dimensi metrik pada graf subdivisi jembatan dengan $m \geq 2$.

Berdasarkan hasil penelitian, dimensi metrik pada graf subdivisi kincir $K_1 + mK_3$ dengan $2 \leq m \leq 4$ berukurang 1 dari dimensi metrik sebelum disubdivisi yaitu $\dim(S(K_1 + mK_3, e)) = \dim(K_1 + mK_3) - 1$. Untuk $2 \leq m \leq 4$.

Daftar Pustaka

Amrullah, A. (2020). The Partition of a Subdivision of a Homogeneous Firecracker. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications. 8(2),* 445-455 ,https://doi.org/10.5614/ejgta.2020.8.2.20

Amrullah, A., Azmi, S., Soeprianto, H., Turmuzi, M., Anwar, YS. (2019). The Partition Dimension of Subdivision Graph on The Star. Journal of Physics: Conference Series. 1280 022037 https://doi.org/10.1088/1742-6596/1280/2/022037

Amrullah, A., Azmi, S., Turmuzi, M., Baidowi, Kurniati, N. (2021). The Bridge Graphs Partition Dimension, *In Journal of Physics:* Conference Series, IOP Publishing 1779(1). 012086. DOI: 10.1088/1742-6596/1779/1/012096

Amrullah, A., Baskoro, E. T., Uttunggadewa, S. & Simanjuntak, R. (2016). The Partition Dimension of Subdivision of a Graph. In *AIP Conference*

Franz, M.O., Scholkopf, B., Mallot, H.A., Bulthoff, H.H. (1998). Learning View Graphs for Robot Navigation. Autonomos Robot 5, 111-125.

G. Chartrand, L. Eroh, M.A. Johnson, and O.R. Oellerman. (2000). Resolv-ability in graphs and the metric dimension of graph. *Discrete Appl. Math*. 105, 99-113.

Harary, F., & Melter, R.A. (1976). On The Metric Dimension of Graph. Ars Combin. 2:191-195.

Haspika, Hasmawati, Aris, N. (2023). The Partition Dimension on the Grid Graph. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*. *19*(2): 351-358.

Hidayanti, G., Amrullah, A., Kurniati, N., Hayati, L. (2022). Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Jembatan Dari *Caterpillar* Homogen Dan Pot Bunga Diperumum. Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika. *22(*1) 69-81

Khuller, S., Raghavachari, B. dan Rosenfeld, A. (1996). Landmarkin Graphs. *Disecrete Appl. Math*. (vol. 70, pp. 217-229).

Miller, M., Patel, D., Ryan, J., Sugeng, K.A., Slamin, S., Tuga, M. (2005). Exclusive Sum Labeling of Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. 55, 137-148.

P. J. Slater. (1975). Leaves Of Trees. Congressus Numerantium. 14:547-559.

Riyandho, R., Narwen, & Efendi. (2018). Dimensi Metrik Graf Kincir Pola $\mathrm{K_1 + mK_4}$. *Jurnal Matematika UNAND*. *7*(3), 149-153.

Wahyudi, S., Sumarno, & Suharmadi. (2011). Dimensi Metrik Pengembangan Graf Kincir Pola $\mathrm{K_1 + mK_3}$. *J. Math. And Its Appl*. *8*(2), 17-22.

Yulianti, L., Hidayati, L., & Welyyanti, D. (2023). Dimensi Metrik Graf Buckminsterfullerene-Subdivisi dan Buckminsterfullerene-Star. *Journal of Mathematics and Its Applications*. *20*(2), 219-229.